Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Michael Lösch — Sommersemester 2021

**Lineare Algebra II**
Blatt 1
Abgabe: 03.05.2021, 10 Uhr
**Gruppennummer angeben!**

**Aufgabe 1** (8 Punkte)**.**
Betrachte die folgende Matrix über $\mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne das charakteristische Polynom $\chi_A(T)$ und seine Nullstellen.

(b) Bestimme die geometrische Vielfachheit jedes Eigenraumes von $A$.

(c) Gib ein maximal linear unabhängiges System von Eigenvektoren an.

(d) Ist $A$ diagonalisierbar?

**Aufgabe 2** (4 Punkte)**.**
Sei $A$ eine $n \times n$-Matrix über dem Körper $\mathbb{K}$ mit charakteristischem Polynom

$$\chi_A(T) = T^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i T^i.$$

Falls $b_0 + \cdots + b_{n-1} = 0$, zeige, dass die Matrix $\mathbf{Id}_n - A$ invertierbar ist.

**Aufgabe 3** (5 Punkte)**.**

(a) Zeige, dass jede $(2n+1) \times (2n+1)$-Matrix über $\mathbb{R}$ einen Eigenvektor besitzt.

**HINWEIS:** Polynome sind stetige Abbildungen.

(b) Berechne nun das charakteristische Polynom der folgenden $3 \times 3$-Matrix über $\mathbb{Q}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Besitzt $A$ einen Eigenvektor (als $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung)?

**Aufgabe 4** (3 Punkte)**.**
Sei $A$ eine diagonalisierbare $n \times n$-Matrix über dem Körper $\mathbb{K}$. Zeige, dass $A$ ähnlich zu ihrer transponierten Matrix ist.

---

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe in ILIAS als eine einzige PDF-Datei einreichen.